

DOI: 10.7652/xjtub201810023

采用非匹配网格离散的快速边界元-有限元 宽频声振耦合分析

王博¹, 王焘¹, 尤军峰², 校金友¹

(1. 西北工业大学航天学院, 710072, 西安; 2. 中国航天科技集团公司四院四十一所, 710025, 西安)

摘要: 为构造出性能优异的声振耦合仿真系统,采用直接耦合方法建立了声振问题的边界元-有限元耦合方程,并对其求解方案的选取进行了详细讨论,最终实现了大规模耦合线性方程组的快速求解;考虑更具一般意义的耦合界面上声场边界元网格和结构有限元网格不匹配的情形,采用加权余量法构造了高阶非匹配单元之间的数据交换矩阵,实现了耦合界面上各物理场之间的高精度数据交换;介绍了适用于宽频问题的快速定向算法的实现原理,并将其引入声振耦合方程,在全频段内实现了对常规边界元矩阵的有效压缩,提高了声振耦合方法的计算效率;通过解析算例和自由度超过 40 万的大规模复杂算例,验证了本文方法的正确性和性能,特别是与现有同类方法相比,本文方法在保证高精度的同时,适用频段明显更宽,可达现有方法的 3~4 倍。

关键词: 声振耦合;边界元;有限元;快速定向算法;非匹配网格;数据交换

中图分类号: O3;V231.92 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2018)10-0167-10

Solving Broadband Vibroacoustic Problems with Fast Boundary Element-Finite Element Method Divided by Non-Matching Meshes

WANG Bo¹, WANG Tao¹, YOU Junfeng², XIAO Jinyou¹

(1. College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. The 41st Institute of the Fourth Academy of CASA, Xi'an 710025, China)

Abstract: Modeling vibroacoustic problems with coupled fast boundary element method and finite element method (BEM-FEM) can maximize the advantages of the various numerical methods, hence can get a vibroacoustic simulation system with excellent performance. The direct coupling scheme is used to establish the vibroacoustic equation, and the selected scheme is discussed in detail to achieve a fast solution for a large-scale coupling system. Then the common mismatch between the sound field meshes and the structural meshes on the coupling interface is considered, and the data-exchange matrices between higher-order non-matching meshes are constructed with weight residual method to realize the highly accurate data exchange. The implementation theory for fast directional algorithm (FDA) suitable for broadband issues is introduced, and the traditional BEM matrices in BEM-FEM matrix are compressed efficiently in entire band by FDA. The correctness and effectiveness of this method are validated by introducing analytical examples and a large-scale complex example over 400,000 degrees of BEM-FEM freedom. In particular, this method is of higher accuracy and suitable for a broader band, which is 3 to 4 times that of the

收稿日期: 2018-03-20。 作者简介: 王博(1992-),男,硕士生;校金友(通信作者),男,教授。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11472217)。

网络出版时间: 2018-07-09

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20180709.1608.002.html>

existing similar methods.

Keywords: vibroacoustics; boundary element method; finite element method; fast directional algorithm; non-matching mesh; data exchange

复杂薄壁结构的声振耦合分析属于多物理场耦合的科学计算问题,也是诸多工业部门对其产品进行力学环境预示的核心问题,具有重要的科学意义和极其广泛的工程应用价值。尤其是在航天领域,航天器多为薄壁结构,刚度小,而在发射过程中产生的喷气噪声和气动噪声强度大、频带宽,通常可达 $10 \sim 10\,000$ Hz,再考虑到火箭发动机燃烧不均匀产生的振动环境,声振耦合现象尤为明显^[1]。

简单结构的声振耦合分析可以通过解析方法得到^[2],但对于复杂结构则必须借助数值手段^[3-4]。声振耦合问题的数值解法主要包括有限元法(FEM)、边界元-有限元(BEM-FEM)耦合方法和统计能量法(SEA)。其中,BEM-FEM耦合方法能够充分发挥BEM和FEM的各自优势,即对声场和弹性结构分别采用BEM和FEM进行建模,再根据结构与声场界面上的边界条件,将声学BEM方程和结构FEM方程联立求解,得到声场和结构的响应,是对声振耦合问题进行仿真计算的理想工具。

构造基于BEM-FEM的声振耦合方程需要完成声场网格和结构网格之间的数据交换。匹配网格间的数据交换可以直接通过界面上相互作用的强形式来准确获得^[5]。由于声场和应力场的场函数梯度不同,采用不同的单元尺寸和形函数来离散结构和声场通常能获得更高的分析效率,同时也能够兼顾建模的便利性。对于声振耦合问题,数据交换的准确程度直接影响到系统方程的求解精度和收敛性^[6]。目前,非匹配网格间的数据交换算法主要分为插值类^[7]、径向基函数类^[8]和加权残差类^[9]等,其中加权残差类方法使非匹配耦合界面上的边界条件以弱形式成立,考虑了虚功等效原理,能够确保传递过程的能量守恒^[7],当使用高阶单元时,比其他2种算法具有更高的精度^[10]。

虽然BEM-FEM耦合方法是研究声振耦合问题的一种有效手段,但传统边界元法形成的系数矩阵是满阵,其计算复杂度为 $O(N^2)$ (N 为系统的自由度数),难以直接用于分析大规模问题。近30年来发展起来的快速算法,如快速多极方法、H矩阵法、自适应交叉近似方法和小波边界元法等^[11],利用系数矩阵可分块低秩分解的特性,将计算量降低到了 $O(N \log N)$,推动了BEM在实际工程领域

的应用。

BEM快速算法的引入为通过BEM-FEM耦合方法分析大规模声振耦合问题提供了有力支撑,然而目前相关方面的研究大多集中在低频段^[4]。这是因为,对于高频波动问题,采用上述这些快速算法得到的系数矩阵子矩阵将不再能够进行低秩分解^[12],因此这些方法只能用于加速计算低频问题。2006年提出的宽频快速多级算法^[12]采用将快速多级算法中变换矩阵对角化的方法,将高频波动问题的计算量降低到了 $O(N \log N)$,但是这种方法的实现过程十分复杂。近年来基于高频问题定向低秩特性提出的快速定向算法^[13],同样成功地将计算量降低到了 $O(N \log N)$ 。相比于宽频快速多级算法,该算法不需要对积分核函数进行复杂的解析展开,构造低秩分解的方法灵活,实现过程简单,而且与核函数的具体表达式无关,因而得到了广泛关注和迅速发展。但是,目前该方法仅用于处理单一的声学问题,在声振耦合问题分析中的应用还未见报道。

本文首先采用Burton-Miller方程描述声场,并通过二阶Nyström方法对声场进行离散;接着,考虑更具一般意义的耦合界面上声场网格和结构网格不匹配的情形,同时结合本文所选声场和结构网格的特点,基于加权余量法建立耦合界面上声场和结构网格之间的数据交换矩阵;然后,采用双向耦合方法将声场BEM方程与结构FEM方程联立,建立声振耦合系统方程,并给出其求解格式;最后,通过适用于宽频问题的快速定向算法对耦合方程中的常规BEM矩阵进行加速,实现了对大规模、宽频声振耦合问题的快速分析,并通过三维数值算例验证了本文方法的正确性以及相较于现有同类方法的优越性。

1 BEM-FEM耦合方法

为了获得更高的分析精度,采用双向耦合方法对声振耦合系统进行建模,即将耦合界面上声场的声压视为附加节点载荷作用于结构,同时将耦合界面上的结构振动响应视为附加声激励作用于声场,最终获得双向耦合方程。为简便起见,本节仅建立声场网格和结构网格完全匹配情形下的声振耦合方程,在第2节再对非匹配情形作进一步讨论。

1.1 建立 BEM-FEM 耦合方程

对结构采用 FEM 建模,考虑了耦合界面上声压作用的频域结构动力学方程如下

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C})\mathbf{u} = \mathbf{f}_s + \mathbf{T}_{a2s}\mathbf{p} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别为刚度矩阵、质量矩阵和阻尼矩阵; $\mathbf{u}$ 为结构 FEM 网格上节点的位移向量; $\mathbf{f}_s$ 为节点的载荷向量; $\mathbf{p}$ 为声场 BEM 网格高斯点上的声压向量; $\mathbf{T}_{a2s}$ 为耦合矩阵,作用是将 $\mathbf{p}$ 转化成结构网格节点上的等效节点力,由于声场网格和结构网格完全匹配,故 $\mathbf{T}_{a2s}$ 仅相当于一个对面内分布载荷 $\mathbf{p}$ 的等效节点力的转化矩阵,通过单元积分即可获得。

采用二阶 Nyström 方法离散声学 Burton-Miller 方程,得到声学 BEM 方程如下

$$\mathbf{H}\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{G}$ 为 BEM 系数矩阵; $\mathbf{q}$ 为声压法向导数向量。

根据线性声学理论,声压 p 与声场速度势 Φ 存在如下关系

$$\mathbf{p} = i\rho\omega\Phi \quad (3)$$

式中 ρ 为声介质密度。对式(3)沿 BEM 网格外法向 $\mathbf{n}_a$ 求导,可得

$$\mathbf{q} = i\rho\omega\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_a = \rho\omega^2\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{n}_a \quad (4)$$

式中: $\mathbf{v}_a$ 为声场网格高斯积分点的法向振速向量; $\mathbf{u}_a$ 为相应的位移向量。由式(4)可知,结构网格表面的位移 $\mathbf{u}$ 经变换可以间接表示式(2)中的 $\mathbf{q}$,即

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_{s2a}\mathbf{u} \quad (5)$$

式中 $\mathbf{T}_{s2a}$ 为耦合矩阵。

将式(5)代入式(2),经整理可得

$$-\mathbf{G}\mathbf{T}_{s2a}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (6)$$

定义结构动刚度矩阵 $\mathbf{K}_s$ 为

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} \quad (7)$$

将式(7)代入式(1),整理后可得

$$\mathbf{K}_s\mathbf{u} - \mathbf{T}_{a2s}\mathbf{p} = \mathbf{f}_s \quad (8)$$

联立式(6)和式(8)并写成矩阵形式,可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & -\mathbf{T}_{a2s} \\ -\mathbf{G}\mathbf{T}_{s2a} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

式(9)即为基于 BEM-FEM 的声振耦合系统方程。

1.2 耦合线性方程组求解

对于式(9)描述的 BEM-FEM 耦合方程,其系数矩阵同时包含了 FEM 矩阵、BEM 矩阵和数据交换矩阵,各子块矩阵的性质也完全不同。一般而言, FEM 动刚度矩阵 $\mathbf{K}_s$ 和耦合矩阵 $\mathbf{T}_{a2s}$ 为稀疏矩阵,而 BEM 矩阵 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{H}$ 为稠密矩阵,见图 1。

针对此类线性方程组,采用单一的求解方法通

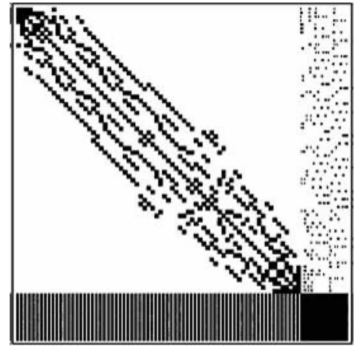


图 1 基于 BEM-FEM 的声振耦合系统矩阵非零元素分布

常难以获得最优的求解效率,有时甚至难以解出可靠结果,因此必须针对该系数矩阵的特点,设计专门的求解格式,并为系数矩阵的不同子块选择最为合适的求解器,以便快速获得高精度的计算结果。

采用耦合的 Burton-Miller 方法求解式(9),将结构系统 FEM 动刚度矩阵聚缩进声学 BEM 系统矩阵中,从而得到耦合的 Burton-Miller 方程,再迭代求解该方程得到声压,最后将得到的声压代入结构 FEM 方程得到位移解。这种方法首先通过消去变量,减少了方程组维数,具有较高的计算效率^[4]。

对式(8)作如下变换

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_s^{-1}(\mathbf{T}_{a2s}\mathbf{p} + \mathbf{f}_s) \quad (10)$$

将式(10)代入式(6),经整理即可得到如下耦合的 Burton-Miller 方程

$$(\mathbf{H} - \mathbf{G}\mathbf{T}_{s2a}\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{T}_{a2s})\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{T}_{s2a}\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{f}_s \quad (11)$$

求解式(11)得到声压 $\mathbf{p}$,再将其代入式(10)计算得到位移 $\mathbf{u}$,最终获得整个声振耦合系统的响应。

分析上述过程可以发现,式(11)的求解效率和精度决定了整个声振耦合系统的分析效率和精度。

下面对求解过程中涉及到的各类关键技术分别进行讨论。求解式(11)可以选择直接解法或迭代解法,但由于系数矩阵 $\mathbf{H} - \mathbf{G}\mathbf{T}_{s2a}\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{T}_{a2s}$ 结构复杂,理论上为非对称满阵,其元素甚至都没有显示存储,直接求解困难,因此通常采用迭代解法。在各类迭代解法中,GMRES 算法以其同时适用于对称和非对称问题、易于与各类预处理技术结合等优点而应用最为广泛,所以本文选择 GMRES 算法作为式(11)的迭代求解器。

在式(11)中,FEM 方程的求解属于稀疏线性方程组求解问题,应该采用直接解法。本文采用多波前 LU 分解算法求解 FEM 方程,通过引入一些典型的修正策略,如特殊的选主元方法、对系数矩阵元素的重排序以及巧妙地利用数据存储结构等,可使该方法实现近似线性的计算复杂度。

为了加速 GMRES 算法的迭代收敛过程,对系数矩阵进行合适的预处理十分必要。文献[4]已经证明,当采用直接解法求解式(9)中的 FEM 方程时,对整个耦合矩阵进行预处理相当于仅对边界元矩阵 $\mathbf{H}$ 进行预处理。常见的 BEM 矩阵预处理方法主要有块对角方法和 ILU 方法,前者实现简单,内存占用少,而后者通常可以获得更高的整体效率。为了尽可能地快速求解式(9),本文选择 ILU 方法。采用预处理技术处理后,最终获得的耦合的 Burton-Miller 方程如下

$$\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{H} - \mathbf{G}\mathbf{T}_{s2a}\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{T}_{a2s})\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T}_{s2a}\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{f}_s \quad (12)$$

式中,预条件子 $\tilde{\mathbf{H}}$ 选为 $\mathbf{H}$ 矩阵的近场元素。

2 非匹配网格数据交换

前面介绍了声场网格与结构网格匹配情形下的快速 BEM-FEM 声振耦合系统方程构造方法,但在实际应用中,这种建模方法存在明显的局限性:首先,不同物理场的场函数通常对单元尺寸有不同的要求,采用匹配网格离散必须考虑对单元尺寸要求最苛刻的情况,从而增加不必要的计算负担;其次,声场和结构场通常在不同的软件环境中离散,确保网格的完全匹配比较困难,不利于建模。

基于此,本节讨论非匹配网格数据交换技术在快速 BEM-FEM 声振耦合方程中的应用,并针对所采用单元的特点,利用加权余量法发展了一种非匹配高阶协调元和高阶非协调元之间的数据交换算法,该算法能确保传递过程的能量守恒,因此,相较插值类方法和径向基函数类方法可以获得更高的数据交换精度。

将声场边界离散为二次曲面 6 节点三角形单元,其单元积分采用 6 点高斯积分公式;将结构离散为二次曲面 8 节点四边形单元,其单元积分采用 9 点高斯积分公式。单元示意图见图 2。

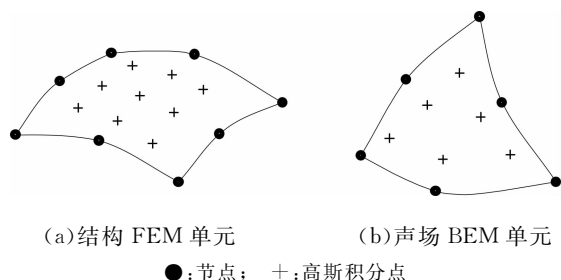


图2 单元示意图

和结构场 Ψ_s 之间引入一个虚拟物理场 Ψ_v ,并分别在 Ψ_v 和 Ψ_s 之间、 Ψ_v 和 Ψ_a 之间定义如下形式的能量对 E_{vs} 和 E_{va}

$$E_{vs} = \int_{\Omega_v} \Psi_v \cdot \Psi_s d\Omega_v = \mathbf{V}_v^T \int_{\Omega_v} \mathbf{N}_v^T \cdot \mathbf{N}_s d\Omega_v \cdot \mathbf{V}_s \quad (13)$$

$$E_{va} = \int_{\Omega_v} \Psi_v \cdot \Psi_a d\Omega_v = \mathbf{V}_v^T \int_{\Omega_v} \mathbf{N}_v^T \cdot \mathbf{N}_a d\Omega_v \cdot \mathbf{V}_a \quad (14)$$

式中: $\mathbf{N}_v$ 、 $\mathbf{N}_s$ 和 $\mathbf{N}_a$ 分别为虚拟物理场网格 Ω_v 、结构网格 Ω_s 和声场网格 Ω_a 对应的形函数矩阵; $\mathbf{V}_v$ 、 $\mathbf{V}_s$ 和 $\mathbf{V}_a$ 分别为定义在 Ω_v 、 Ω_s 和 Ω_a 节点上的场向量。令 E_{vs} 和 E_{va} 相等,即

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_v^T \cdot \mathbf{N}_s d\Omega_v \cdot \mathbf{V}_s = \int_{\Omega} \mathbf{N}_v^T \cdot \mathbf{N}_a d\Omega_v \cdot \mathbf{V}_a \quad (15)$$

定义提供数据的场为源场,接收数据的场为目标场。当结构为源场、声场为目标场时,令 Ω_v 与 Ω_a 重合,从而得到 $\mathbf{N}_v = \mathbf{N}_a$,代入式(15)并经整理可得

$$\mathbf{V}_a = \left[\int_{\Omega_a} \mathbf{N}_a^T \cdot \mathbf{N}_a d\Omega_a \right]^{-1} \int_{\Omega_a} \mathbf{N}_a^T \cdot \mathbf{N}_s d\Omega_a \cdot \mathbf{V}_s \quad (16)$$

定义如下 2 个数据交换矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{aa} &= \int_{\Omega_a} \mathbf{N}_a^T \cdot \mathbf{N}_a d\Omega_a \\ \mathbf{D}_{as} &= \int_{\Omega_a} \mathbf{N}_a^T \cdot \mathbf{N}_s d\Omega_a \end{aligned} \quad (17)$$

将式(17)代入式(16)可得

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{D}_{aa}^{-1} \mathbf{D}_{as} \cdot \mathbf{V}_s \quad (18)$$

式(18)即为结构网格节点向量 $\mathbf{V}_s$ 向声场网格节点向量 $\mathbf{V}_a$ 转化的公式,可以发现当声场网格和结构网格完全匹配时, $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_s$ 。同理,当声场为源场、结构为目标场时,声场网格节点向量 $\mathbf{V}_a$ 向结构网格节点向量 $\mathbf{V}_s$ 转化的公式为

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{D}_{ss}^{-1} \mathbf{D}_{sa} \cdot \mathbf{V}_a \quad (19)$$

式中,数据交换矩阵 $\mathbf{D}_{ss}$ 和 $\mathbf{D}_{sa}$ 通过下式计算

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{ss} &= \int_{\Omega_s} \mathbf{N}_s^T \cdot \mathbf{N}_s d\Omega_s \\ \mathbf{D}_{sa} &= \int_{\Omega_s} \mathbf{N}_s^T \cdot \mathbf{N}_a d\Omega_s \end{aligned} \quad (20)$$

接下来,分别推导耦合矩阵 $\mathbf{T}_{s2a}$ 和 $\mathbf{T}_{a2s}$ 的具体表达式。 $\mathbf{T}_{s2a}$ 的功能是将结构网格节点上的位移转化成声场网格高斯积分点上的法向振速, $\mathbf{T}_{a2s}$ 的功能是将声场网格高斯积分点上的声压转化成结构网格节点上的等效节点力。

首先,计算结构网格节点处的位移 $\mathbf{u}_{sv} = \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{f}_s$; 然后,由式(18)获得声场网格节点上的位移

首先,建立能量守恒方程,此时需要在声场 Ψ_a

$$\mathbf{u}_{av} = \mathbf{D}_{aa}^{-1} \mathbf{D}_{as} \cdot \mathbf{u}_{sv} \quad (21)$$

为了获得声场网格高斯积分点处的位移向量 $\mathbf{u}_{aG}$, 对 $\mathbf{u}_{av}$ 进行单元插值

$$\mathbf{u}_{aG} = \mathbf{N}_a \cdot \mathbf{u}_{av} \quad (22)$$

对式(22)中的 $\mathbf{u}_{aG}$ 沿法向求导, 即可获得声场网格高斯积分点处的法向振速

$$\mathbf{q}_{aG} = \mathbf{N}_{na} \cdot \mathbf{u}_{aG} \quad (23)$$

式中, $\mathbf{N}_{na}$ 为声场网格高斯积分点处的法向求导矩阵。整理上述过程, 可得

$$\mathbf{T}_{s2a} = \mathbf{N}_{na} \cdot \mathbf{N}_a \cdot \mathbf{D}_{aa}^{-1} \mathbf{D}_{as} \quad (24)$$

式(24)即为 $\mathbf{T}_{s2a}$ 的具体表达式。

由于本文采用非协调元离散声场边界, 故 $\mathbf{p}$ 为声场网格高斯积分点上的声压向量, 进行数据交换前, 首先需对 $\mathbf{p}$ 进行一次外插, 以获得声场网格节点上的声压向量

$$\mathbf{p}_{av} = \tilde{\mathbf{N}}_a \cdot \mathbf{p} \quad (25)$$

式中, $\tilde{\mathbf{N}}_a$ 为声场单元外插矩阵。根据式(19)可获得结构网格节点上的声压

$$\mathbf{p}_{sv} = \mathbf{D}_{ss}^{-1} \mathbf{D}_{sa} \cdot \mathbf{p}_{av} \quad (26)$$

为了将声压作为附加节点力载荷施加到结构节点上, 先对其进行单元插值, 获得结构网格高斯积分点上的声压分布

$$\mathbf{p}_{sG} = \mathbf{N}_s \cdot \mathbf{p}_{sv} \quad (27)$$

然后采用高斯积分计算单元内分布载荷的等效节点力转换公式, 得到结构网格节点上的等效节点力

$$\mathbf{f}_{sv} = \mathbf{N}_s^T \cdot \mathbf{W}_s \cdot \mathbf{p}_{sG} \quad (28)$$

式中, $\mathbf{W}_s$ 由高斯积分权重与相应的方向导数的乘积组成。整理式(25)~(28), 可得

$$\mathbf{T}_{a2s} = \mathbf{N}_s^T \cdot \mathbf{W}_s \cdot \mathbf{N}_s \cdot \mathbf{D}_{ss}^{-1} \mathbf{D}_{sa} \cdot \tilde{\mathbf{N}}_a \quad (29)$$

式(29)即为 $\mathbf{T}_{a2s}$ 的具体表达式。

由上述推导过程可知, 式(24)和(29)中对矩阵 $\mathbf{D}_{aa}$ 和 $\mathbf{D}_{ss}$ 进行求逆是这个方法最耗时的部分。不过, 对式(17)和(20)进行分析可以发现, 这 2 个矩阵类似于 FEM 中的质量矩阵, 是对称正定的, 因此可以通过 Cholesky 分解方法实现快速分解, 当问题规模较大时, 也可以借助一些快速 Cholesky 分解方法, 如多波前 Cholesky 分解方法等。

式(17)和(20)定义了 4 个数据交换矩阵的计算格式, 其中 $\mathbf{D}_{aa}$ 和 $\mathbf{D}_{ss}$ 的计算可以通过简单的单元积分实现。但是, $\mathbf{D}_{as}$ 和 $\mathbf{D}_{sa}$ 的计算都涉及到对定义在不同网格上的形函数矩阵乘积进行积分的问题, 需要对积分点进行投影, 以及对单元重叠部分进行切割并进行重划分等复杂操作, 实现过程复杂, 这也是非匹配网格数据交换中的重点和难点。

本文采用文献[7]给出的基于单元的积分方案计算 $\mathbf{D}_{as}$ 和 $\mathbf{D}_{sa}$ 。为了叙述简便, 后文称被积单元为“主单元”, 称与主单元重合的单元为“从单元”。该方法只需确定出主单元积分点的投影点属于哪个从单元, 同时计算出投影点在从单元内相应的参数坐标即可。遍历全部主单元后, 将前期确定的投影点形参坐标代入式(17)和(20), 对每一个主单元直接进行积分获得其对应的子矩阵, 最后根据投影点所属的从单元编号将子矩阵投放到 $\mathbf{D}_{as}$ 和 $\mathbf{D}_{sa}$ 中。

采用基于单元的积分方案, 主要工作量是确定主单元积分点的投影点所属的从单元及其参数坐标。投影点在从单元上的大体位置可以根据几何模型的建模特点或快速 BEM 中的八叉树状结构快速获得, 但具体形参坐标的确定还存在一定困难, 特别是针对高阶单元, 因此本文采用一种牛顿类迭代方法来确定投影点的形参坐标。

3 快速定向边界元法

通过常规 BEM 获得的系数矩阵 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{G}$ 均为满阵, 计算量和存储量都很大, 无法运用大规模问题的分析计算方法, 因此本文采用快速定向压缩边界元法对其进行快速计算, 可在宽频范围内将计算复杂度降低到 $O(N \log N)$ 。下面仅对这种方法作简单介绍, 详细内容可参考文献[13]。

首先定义自适应八叉树结构: 定义格子 C_0 , 使所有声场边界单元均包含在其中, 作为八叉树的根; 然后对八叉树中的叶格子进行细分, 得到下一层的格子; 继续这样细分, 直到每一个叶格子都只包含不超过 N_p 个声场节点。对于每一层格子, 将它们的尺寸记为 w , 将 $w < \lambda$ 的层称为低频层, 其他的层称为高频层。对于格子 C , 若它在低频层上, 则定义它的近场 N^C 为同一层上所有与它相邻的格子所在的区域; 若它在高频层上, 则定义它的近场为所有格子 $\{B | \text{dist}(B, C) \leq O(kw^2)\}$ 所在的区域。定义它的远场 F^C 为除去近场 N^C 后的其他区域。将 C 的父格子记为 P , 定义它的交互场 $I^C = N^P \setminus N^C$ 。当 C 在高频层上时, 将它的交互场划分成若干个楔形区, 使得每个楔形区张开的角度为 $O(1/(kw))$, 则格子 C 和它的每个楔形区之间均满足抛物线分离条件, 如图 3 所示。

将图 3 所示的楔形区称为 C 的 $\mathbf{a}$ 方向楔形区。为便于叙述, 将低频层格子的远场称为它的 $(0, 0, 0)$ 方向的楔形区。可以证明: 不论 C 在高频层还是在低频层, 当源点 $\mathbf{y}$ 和场点 $\mathbf{x}$ 分别在 C 中和它的楔形

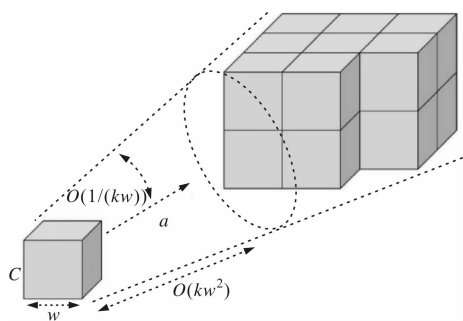


图3 抛物线分离条件

区中时,核函数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 均可按如下形式进行低阶展开

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{T(\epsilon)} \alpha_i(\mathbf{x}) \beta_i(\mathbf{y}) \quad (30)$$

因此, $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{G}$ 中与 C 及其楔形区相对应的子矩阵可以近似低秩分解,即与此子矩阵相对应的乘法运算可以采用快速算法加速。

与传统快速多极方法不同,本文采用的快速定向压缩算法并不将核函数解析展开成式(30)的形式,即不对核函数进行多极展开或局部展开,而是借助于等效源和检测势的方法构造快速算法。快速定向压缩算法具有与传统快速多极方法相同的结构,即都由 S2M、M2M、M2L、L2L、L2T 变换组成,下面对它们分别进行介绍。

S2M 变换根据每个叶格子 C 中的源,构造它的外出等效源。为此,首先定义外出等效点和外出检测点,如图 4 所示。S2M 变换由如下 2 步运算构成:

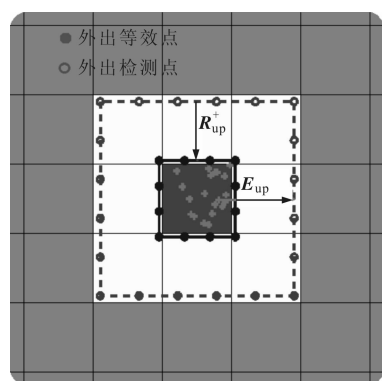
(1)根据 C 中节点上的源计算外出检测点上的外出检测势,其运算矩阵记为 $\mathbf{E}_{up}$;

(2)根据第(1)步得到的外出检测势,在外出等效点上构造外出等效源,使得外出等效源与 C 中节点上的源在外出检测点上产生的势相等,其运算矩阵记为 $\mathbf{R}_{up}^+$ 。

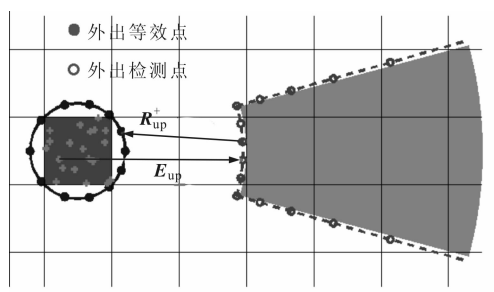
S2M 运算过程如图 4 所示。

若 C 为非叶格子, M2M 运算根据它子格子上的外出等效源计算它本身的外出等效源。此运算步骤与 S2M 类似,只需要将第(1)步中的源换为子格子的等效源即可。需注意,当 C 在高频层上时,需要对它的每一个楔形区构造一组等效源。

在快速定向压缩算法的下行运算中,对于每一个格子需要定义另外 2 组点,称为返回等效点和返回检测点,它们可以定义为分别与外出检测点和外出等效点重合,如图 5 所示。类似地,快速算法中将计算返回检测点上的势,称为返回检测势,并且需要

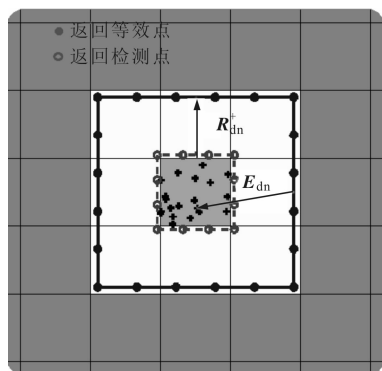


(a) 低频层上的 S2M 变换

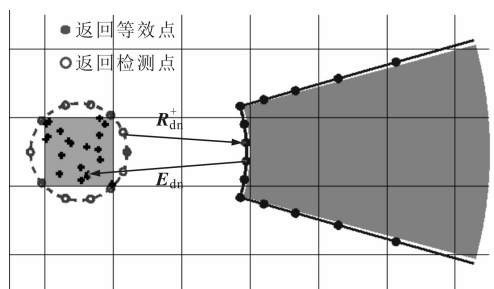


(b) 高频层上的 S2M 变换

图4 S2M 变换过程



(a) 低频层上的 L2T 变换



(b) 高频层上的 L2T 变换

图5 L2T 变换过程

在返回等效点上构造等效源,称为返回等效源。

快速定向压缩算法的 M2L 运算,是根据格子 C 上的外出等效源计算 I^C 中与 C 在同一层格子上的

下行检测势。当格子 $B \in I^c$ 且 B 与 C 在同一层时,若 B 在 C 的 a 方向楔形区中,则 C 必在 B 的 $-a$ 方向楔形区中。因此,格子 B 上 a 方向的返回检测势需要用格子 C 上 $-a$ 方向的外出等效源计算。

对于每一个非空、非叶格子 C ,L2L 运算是根据它的返回检测势计算它子格子的返回检测势,而对于叶格子,L2T 运算是根据它的返回检测势计算其内部配置点上的势。L2L 和 L2T 可分别看作 M2M 和 S2M 的逆变换。L2T 的计算过程如图 5 所示。

4 算 例

全部算例均在一台 12 核(Intel Xeon E5-2643 v4,3.40 GHz)128 GB 内存的工作站上进行,所有程序都采用单线程 C++ 编写。BEM 快速算法的精度和 GMRES 算法的收敛残差都给定为 10^{-6} 。为了验证本文所提之方法的正确性与性能,首先引入 2 个具有代表性的声振耦合解析模型。

模型 1 声振耦合内问题。一单位立方体内声腔,声介质为水,其中一个表面简支了一块 $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ 的钢板,厚度 $t=0.01\text{ m}$,其余表面固支,在钢板表面距离其左下角 $(0.2\text{ m}, 0.3\text{ m})$ 的位置作用一单位简谐集中力,见图 6。水的密度 $\rho_a=1\,000\text{ kg/m}^3$,水中声速 $v_a=1\,481\text{ m/s}$;钢的弹性模量 $E=210\text{ GPa}$,密度 $\rho_s=7\,900\text{ kg/m}^3$,泊松比 $\mu=0.3$ 。将该模型的结构部分离散为 5 400 个四边形壳单元,声场部分离散为 2 580 个三角形壳单元,BEM-FEM 模型的总自由度为 37 428。

文献[2]给出了该模型激振点处位移和声压的解析解。

模型 2 声振耦合外问题。一钢质球壳,半径 $R=5\text{ m}$,壁厚 $t=0.05\text{ m}$,完全浸入水中,在其表面任一点处作用一单位简谐集中力,见图 7。水和钢的物理参数同模型 1。将该模型的结构部分离散为 2 400 个 8 节点四边形壳单元,声场部分离散为 4 800 个 6 节点三角形壳单元,BEM-FEM 模型的总自由度为 72 012。

该模型激振点处位移和声压的解析解可参见文献[2]。

4.1 数据交换精度验证

此算例旨在验证第 2 节构造的数据交换算法的精度。定义如下试函数

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy + 1 \quad (31)$$

式中, (x,y,z) 为耦合界面上的网格节点坐标。由

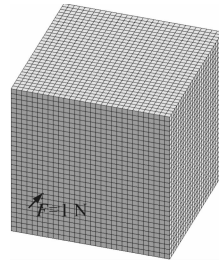


图 6 模型 1 的 FEM 模型

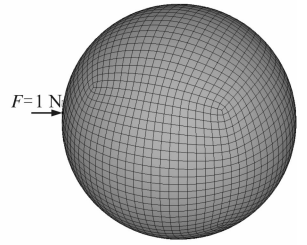


图 7 模型 2 的 FEM 模型

于声场和结构均采用二阶单元离散,故试函数取二次即可。

首先,根据式(31)计算出声场网格和结构网格节点处的解析向量 $\mathbf{V}_a^*$ 和 $\mathbf{V}_s^*$,接着分别通过式(21)和(26)计算出数值向量 $\mathbf{V}_a$ 和 $\mathbf{V}_s$ 。定义误差计算公式如下

$$\zeta_{s2a} = \frac{\|\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_a^*\|_2}{\|\mathbf{V}_a^*\|_2}; \quad \zeta_{a2s} = \frac{\|\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_s^*\|_2}{\|\mathbf{V}_s^*\|_2} \quad (32)$$

式中, ζ_{s2a} 和 ζ_{a2s} 分别表示 $\mathbf{D}_{aa}^{-1}\mathbf{D}_{as}$ 和 $\mathbf{D}_{ss}^{-1}\mathbf{D}_{sa}$ 数据交换过程的误差,由于本文数据交换算法的主要误差来自于 4 个 Mortar 矩阵,故 ζ_{s2a} 和 ζ_{a2s} 也体现了整个数据交换过程的误差。根据式(32)对模型 1 和模型 2 的数据交换矩阵的精度进行验证,得到各单元节点的误差分布,见图 8 和图 9。

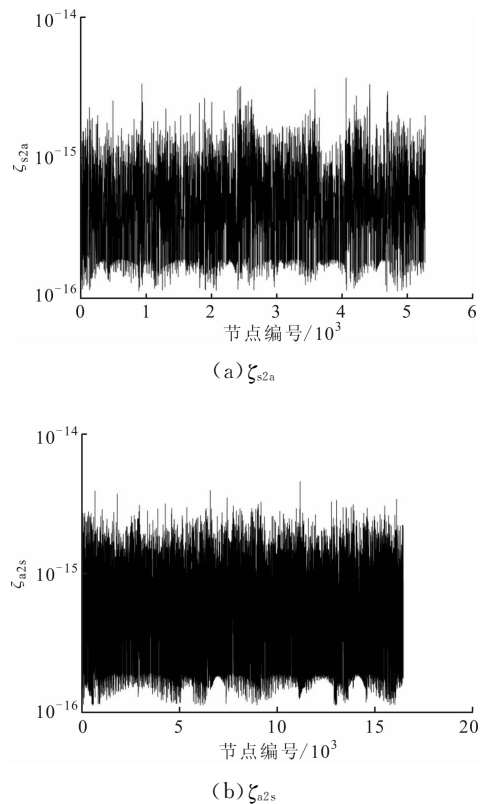


图 8 模型 1 的数据交换精度验证

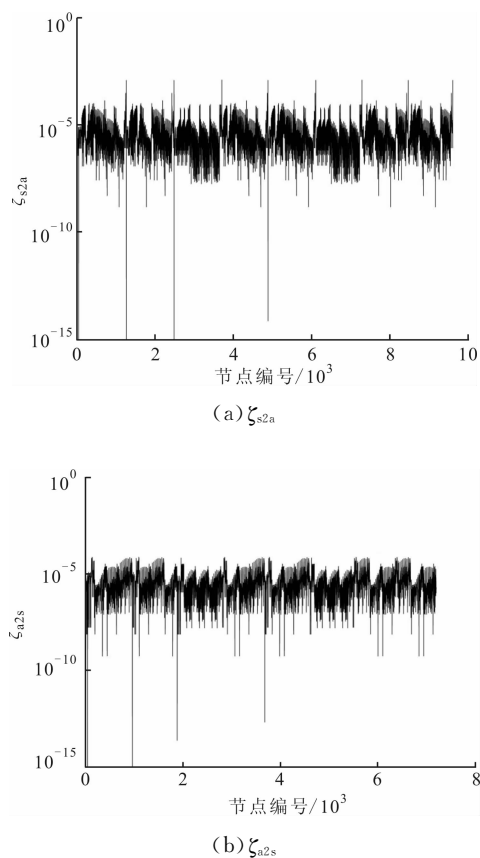


图9 模型2的数据交换精度验证

观察图8和图9可知:当模型外表面的几何形状为平面时,数据交换过程不损失精度;当外表面为曲面时,部分节点的最大误差为 10^{-3} 量级,但整体误差都在 10^{-4} 以下。分析图9中误差产生的原因,认为主要有2个:①对曲面进行积分时受本文所采用积分方案的精度限制;②2套网格之间存在间隙,模型有离散误差。

4.2 声振耦合精度验证

此算例旨在验证本文构造的快速BEM-FEM声振耦合方法的正确性及性能。分别对模型1和模型2进行扫频分析,模型1的扫频区间为1~1 000 Hz,步长为1 Hz;模型2的扫频区间为1~300 Hz,步长取为1 Hz。分别提取这2个模型每个采样频率下激振点的位移,绘制频响曲线,并和解析解进行对比,见图10和图11。

观察图10和图11可以发现,本文方法计算出的这2个模型的激振点位移均与解析解吻合良好,证明无论是对于声振耦合内问题还是外问题,本文方法均能保证正确性。在公开文献中,模型1的扫频范围仅为1~250 Hz^[14],而模型2的扫频范围仅为1~100 Hz^[4,6],远低于本文方法所适用的频段。此外,将上述本文计算结果与相关文献中同类方法

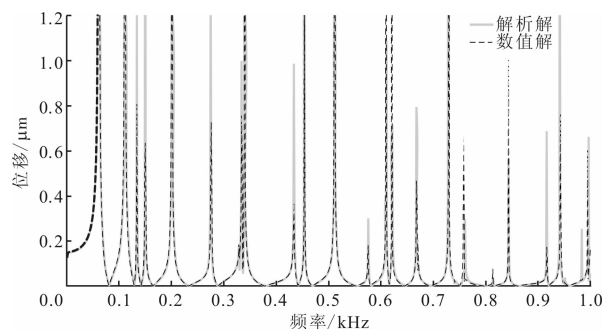


图10 模型1激振点位移频响曲线的数值解与解析解对比

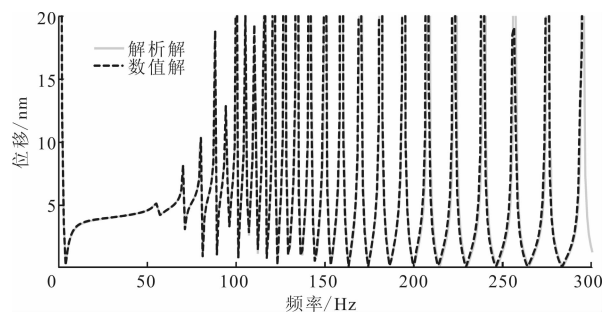


图11 模型2激振点位移频响曲线的数值解与解析解对比

的计算结果^[4,14]进行对比,发现本文方法的精度也具有一定优势。

在计算效率方面,以模型2浸水球壳算例进行对比,计算频率为65 Hz。文献[4]采用同类方法,在Intel Xeon 5160 3.0 GHz GPU、单线程C++代码的计算环境下计算一个总自由度为27 958(其中FEM自由度为23 964,BEM自由度为3 994)的模型,最少耗时3.46 min,而本文方法在类似计算环境下计算一个总自由度为72 012(其中FEM自由度为43 212,BEM自由度为28 800)的模型,仅耗时3.56 min,表明本文方法的计算效率明显更高。另外,随着频率升高,文献[4]的快速BEM会因为不支持高频问题而失效,而本文的快速定向压缩BEM仍能保证较高的计算效率。

观察图10和图11还发现,本文方法的计算结果在共振峰处与解析解存在较大误差。对于图10来说,这主要是因为其对应的声振耦合解析模型为一声振耦合内问题,结构建模时没有考虑阻尼,不存在能量耗散,即在共振峰处解析解理论上为无穷大,因此数值解和解析解在共振峰处存在一定误差。在图11中,主要是在一些比较尖锐的共振峰处数值解与解析解存在较大误差,而在一些比较“钝”的共振峰处(主要是在第1、2、3、5个共振峰处),二者吻合良好,这是因为该模型为一声振耦合外问题,虽然结构没有阻尼,但在无穷远处存在能量耗散,因此这些

峰值处存在类似于阻尼耗能的现象^[2]。当理论计算结果趋于无穷时,数值方法的计算精度通常很难保证,这也是很多数值方法的局限性,如文献[4,14]中的计算结果,也存在类似现象。

4.3 大规模工程应用算例

在航海工程领域,声对抗技术的发展对以潜艇、鱼雷等为代表的水下航行器的振动和噪声水平提出了更为严苛的标准。虽然水下结构的刚度比航天器的大,但因声介质是水,其阻抗远大于空气阻抗,故声振效应尤为明显。复杂壳体作为水下航行器的原型结构,对其声振特性进行分析将能够有效指导设计,降低研发成本。另外,此类问题属于声振耦合外问题,需要对外声场进行建模,而这正是本文构造的快速 BEM-FEM 耦合方法的优势所在。

建立如图 12 所示壳体的半剖模型,轴向总长度 $l=6.0\text{ m}$,半球端面半径 $r=0.5\text{ m}$,内外壳壁厚 $t_1=0.02\text{ m}$,加强筋和隔板厚度 $t_2=0.05\text{ m}$ 。该系统的结构和声场的物理参数与前文模型 1 和模型 2 的相同。图 12 中的箭头表示幅值为 1 N/m^2 的简谐载荷,分别沿 X 方向和 Z 方向。该模型的结构部分被离散成 20 702 个 8 节点四边形单元,其中耦合界面上的单元数为 6 900;外声场被离散为 13 800 个 6 节点三角形单元;BEM-FEM 系统的总自由度为 420 654。

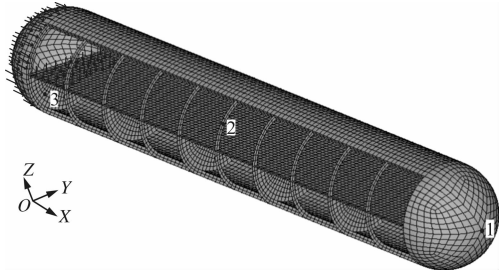


图 12 水中复杂壳体的半剖 FEM 模型

对该模型进行扫频计算,关注的频率范围为 $1\sim1\,000\text{ Hz}$,步长取为 1 Hz 。提取图 12 中 1、2 和 3 位置处的位移,分别绘制其 X 、 Y 和 Z 方向的频响曲

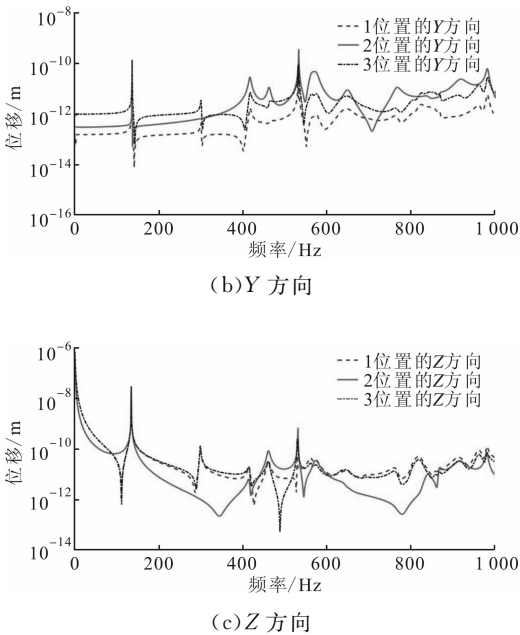
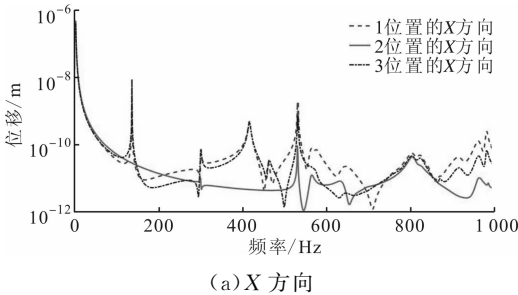


图 13 图 12 中 1、2 和 3 位置处的位移频响曲线

线,见图 13。提取图 13 中第 1 个共振峰处 (135 Hz) 的解向量绘制位移云图和声压云图,见图 14。该算例共计耗时 209 h ,内存占用 13.8 GB 。

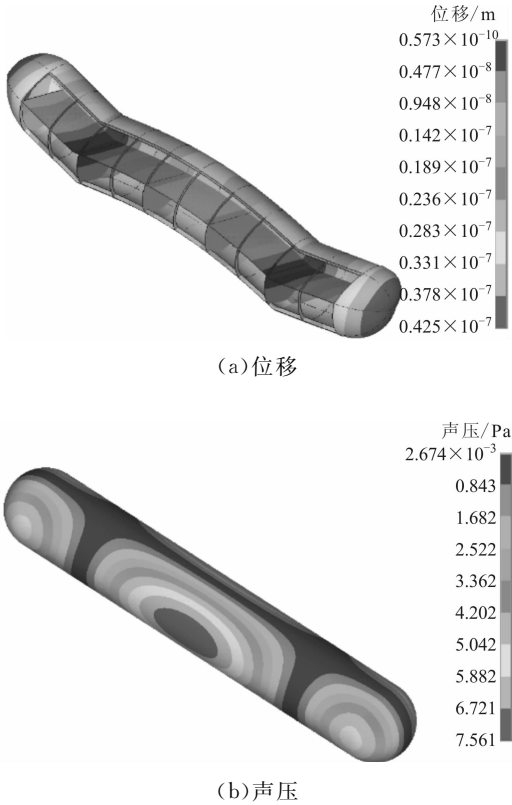


图 14 图 13 频响曲线第 1 个共振峰处 (135 Hz) 的响应

5 总 结

本文采用边界元-有限元耦合的方法求解结构

的声振问题,并通过适用于宽频波动问题的快速定向算法对常规边界元进行加速,同时考虑耦合界面上声场网格和结构网格不匹配的情形,基于加权余量法建立了非匹配网格之间的数据交换矩阵,最终建立了一套性能优异的声振耦合求解方法。

(1)针对耦合界面上的非匹配网格数据交换问题,采用加权余量法构造数据交换矩阵,并通过基于单元的积分方案计算耦合场上的单元积分。当耦合界面为平面时,数据交换过程不损失精度,当其为曲面时,数据交换的最大误差不超过 10^{-3} 。

(2)针对常规边界元矩阵为满阵的问题,采用适用于宽频波动问题的快速定向算法对常规边界元进行加速,实现了声场的快速计算。与现有同类方法相比,本文方法的适用频段范围具有明显优势,可达现有同类方法的3~4倍。

(3)将本文方法应用于实际工程中常见的水下复杂壳体的声振耦合外问题,在普通工作站上实现了自由度超过40万的声振耦合系统的响应计算。

参考文献:

- [1] 邹元杰, 韩增尧, 张瑾. 航天器全频域力学环境预示技术研究进展 [J]. 力学进展, 2012, 42(4): 445-454. ZOU Yuanjie, HAN Zengyao, ZHANG Jing. Research progress on full-frequency prediction techniques of spacecraft's mechanical environment [J]. Advances in Mechanics, 2012, 42(4): 445-454.
- [2] JUNGE M C, FEIT D. Sound, structures, and their interaction [M]. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1986: 279-287.
- [3] CUI X Y, HU X, WANG G, et al. An accurate and efficient scheme for acoustic-structure interaction problems based on unstructured mesh [J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2017, 317(6): 1122-1145.
- [4] JUNGE M, GAUL L. A comparison of FE-BE coupling schemes for large-scale problems with fluid-structure interaction [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 77(5): 664-688.
- [5] GAUL L, BRUNNER D, JUNGE M. Simulation of elastic scattering with a coupled FMBE-FE approach

- [M]// Recent Advances in Boundary Element Methods. Berlin, Germany: Springer, 2009: 131-145.
- [6] PETER H, MARBURG S, KESSISSOGLOU N. Structural acoustic coupling on non-conforming meshes with quadratic shape functions [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2012, 91(1): 27-38.
- [7] FARAH P, VUONG A T, WALL W A, et al. Volumetric coupling approaches for multi-physics simulations on nonmatching meshes [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2016, 108(12): 1550-1576.
- [8] BECKERT A, WENDLAND H. Multivariate interpolation for fluid-structure-interaction problems using radial basis functions [J]. Aerospace Science and Technology, 2001, 5(2): 125-134.
- [9] JAIMAN R K, JIAO X, GEUBELLE P H, et al. Assessment of conservative load transfer for fluid-solid interface with non-matching meshes [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 64(15): 2014-2038.
- [10] DE BOER A, ZUIJLEN A H V, BIJL H. Comparison of conservative and consistent approaches for the coupling of non-matching meshes [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197(49): 4284-4297.
- [11] LIU Y J, MUKHERJEE S, NISHIMURA N, et al. Recent advances and emerging applications of the boundary element method [J]. Applied Mechanics Reviews, 2011, 64(3): 617-636.
- [12] CHENG H, CRUTCHFIELD W Y, GIMBUTA Z, et al. A wideband fast multipole method for the Helmholtz equation in three dimensions [J]. Journal of Computational Physics, 2006, 216(1): 300-325.
- [13] 曹衍闯. 快速定向压缩边界元法理论及其应用 [D]. 西安: 西北工业大学, 2015: 63-93.
- [14] FISCHER M, GAUL L. Fast BEM-FEM mortar coupling for acoustic-structure interaction [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 62(12): 1677-1690.

(编辑 葛赵青)